

 <p>MINISTERUL EDUCAȚIEI</p> <p>Societatea de Științe Matematice din România, Filiala Caraș - Severin</p>	 
--	--

Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală (OLM), Caraș – Severin, 10.02.2024

Clasa a XI-a

Barem de evaluare și notare.

(Orice soluție corectă se punctează la maxim)

Problema 1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și mulțimea

$G = \{M(a) = I_2 + a \cdot A \mid a \in \mathbb{R}\}$. Arătați că:

- (a) $M(a) \cdot M(b) \in G$, pentru orice numere reale a și b .
- (b) pentru orice număr natural nenul n există $x_n \in \mathbb{N}$ astfel încât $A + A^2 + A^3 + \dots + A^n = x_n \cdot A$

și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{x_n}$. (Supliment GM 10/2023, enunț ușor modificat)




Soluție:

a) $M(a)M(b) = M(a + b + 3ab) \in G$	4p
b) $A^n = 3^{n-1} \cdot A, \forall n \in \mathbb{N}^*$	1p
$x_n = \frac{1}{2}(3^n - 1), \forall n \geq 2$	1p
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{x_n} = 0$	1p

Problema 2. Se consideră mulțimea T a matricelor de ordinul 3 care au toate elementele egale cu 1 sau cu -1 .

- (a) Determinați numărul elementelor mulțimii T și dați un exemplu de matrice inversabilă $A \in T$.
- (b) Arătați că, dacă $B \in T$ este o matrice inversabilă, atunci $\det B \in \{-4, 4\}$.

Soluție:

 MINISTERUL EDUCAȚIEI Societatea de Științe Matematice din România, Filiala Caraș - Severin	 
---	--

a) $\text{card}T = 2^9 = 512$	3p
Orice exemplu corect	1p
b) Adunăm elementele primei linii la L_2 și L_3 ; se obțin elemente din mulțimea $\{-2, 0, 2\}$ și apoi se scoate câte un 2 factor comun, deci $\det A$ este multiplu de 4. Cum $\det A$ este o sumă de 6 termeni din $\{-1, 1\}$, rezultă $\det A \in [-6, 6]$ și cum $\det A \neq 0 \Rightarrow \det A \in \{-4, 4\}$	3p

Problema 3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x$, precum și șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_n = \{\sqrt{f(n)}\}, \forall n \geq 1$. ($\{t\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real t).

(a) Demonstrați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent și determinați limita sa.

(b) Determinați numărul rațional k pentru care $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin k\pi x} = \frac{2}{\pi}$.

(Supliment GM 11/2023)

Soluție:

a) $\left[\sqrt{n^2 + n}\right] = n \Rightarrow a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ deci șirul este convergent	4p
b) $k = \frac{1}{2}$	3p

Problema 4. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_0 = 1, a_1 = 2$ și $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 2a_{n-1}}, (\forall) n \geq 1$.

Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

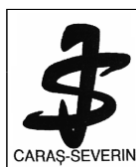
Soluție:

Arată $a_{n+1} \geq 0, (\forall) n \geq 0, a_1 = 2, a_0 = 1$, deci $a_n \geq 0, (\forall) n \geq 0$	1p
$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 2a_{n-1}} > a_n \Rightarrow a_n$ strict crescător	2p



MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România,
Filiala Caraș - Severin



$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 2a_{n-1}} < \sqrt{a_n^2 + 2n} < \sqrt{a_n^2 + 2a_n + 1} = a_n + 1$	1p
Deci $1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 + \frac{1}{a_n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$	1p
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{n+1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{a_{n+1} + a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_{n-1}}{a_{n+1} + a_n} = 1$	2p